116 (2021/2)
ISSN 1126-5191

Sui fondamenti della matematica
On the Foundations of Mathematics

Vincenzo Costa*

In questo lavoro, studiamo i fondamenti della matematica nel senso di vedere come sia stato affrontato il problema di una sua possibile auto-fondazione, ovvero l'eventuale completezza della matematica stessa, constatando che la risposta è risultata negativa. Tale aspetto è, in proiezione, anche connesso al problema della dimostrabilità o meno dell'"esistenza di Dio" così come a possibili conseguenze negli aspetti applicativi, anche in finanza. Ciò utilizzando i paradigmi della logica e lungo un *excursus* storico che mostra come si sia evoluta la letteratura in tale contesto.

In this work, we study the foundations of mathematics in the sense of seeing how the problem of its possible self-foundation, or its possible completeness, has been addressed, noting that the answer is negative. This aspect is, in projection, also connected to that one of proving or not the "existence of God" as well as to possible consequences in the application aspects, even in finance. This using the paradigms of logic and along a historical excursus that shows how literature has evolved in this context.

1. Introduzione

Uno dei più rilevanti problemi che ci si sia posti nella scienza e in via teorica e per le sue conseguenze pratiche è capire se sia possibile costruire una teoria all'interno di se stessa, ovvero sia realizzabile un cammino il quale, partendo da basi comuni minime, non contraddittorie, permetta di costruire in modo completo la teoria stessa. Questo permetterebbe di non avere "buchi" nelle teorizzazioni delle varie branche della scienza, nel senso di non scoprire la presenza di proprietà di fatto vere per verifiche empiriche o comunque sensate o comunque significative in sé, che siano dimostrabili quindi prima o poi. In tal senso, è chiaro come tra le varie scienze, quella considerata da tanti come la regina, ovvero la matematica, sia il primo terreno di analisi di un problema siffatto. Se, in concreto, essa fosse tale da permettere di dimostrare ogni risultato con proprietà interna, si potrebbe sensatamente ipotizzare che lo stesso possa avvenire per

* Docente di Rischio Finanziario e Finanza Comportamentale e già docente di Matematica Generale, presso l'Università diEconomia e Giurisprudenza.

ISSN 1126-5191

tutte le altre scienze, anche per quelle umane, per poi tutte insieme fare un salto complessivo verso la filosofia e quindi verso l'amore per la sapienza come indica la sua etimologia, toccando magari punti delicati ma rilevanti per ogni individuo, non ultimo gli aspetti religiosi connessi con l'esistenza di Dio. Ahinoi, però, già la matematica stessa "fallisce" in tale obiettivo, non solo prendendo come base una sua parte fondamentale, la matematica elementare come cammino utile per semplificare problemi più complessi, ma in termini più generali, visto che la matematica (e ogni teoria/scienza) è incompleta.

Il presente lavoro si divide in sei parti, inclusa la presente che fa da prima ovviamente. Nella seconda, viene presentata una breve premessa utile a sottolineare come sia fondamentale specificare i punti di partenza ed esplicitare le ipotesi per evitare che i sottintesi portino a equivoci o a risultati anche sorprendenti[1]. Nella terza sono introdotti vari richiami utili, tra cui la definizione di insiemi, gli assiomi dei numeri reali e specificate alcune basi logiche fondamentali quali il *modus ponens* e le tecniche dimostrative[2]. Nella quarta, vengono posti i due problemi centrali di cui si occupa il presente lavoro: il primo attiene alla possibile "auto-consistenza" e quindi una generazione "all'interno di se stessa" per così dire della matematica; mentre il secondo si chiede se esista un ponte che lega matematica e filosofia (con un'intuitiva risposta positiva per il secondo con le dovute attenzioni), toccando la significativa definizione di cardinalità[3]. A tal fine, risultano opportune le specifiche su cosa sia la tecnica di dimostrazione per assurdo nonché il principio di induzione, terreni preparatori congiuntamente con l'analisi di possibili paradossi (quali quello di Russell)[4] se si fa ricorso alla *Teoria "ingenua" degli insiemi*[5]. Ciò è connesso con la necessità di utilizzare la *Teoria degli insiemi di Zermelo-Fraenkel* e studiare i problemi di indeducibilità, quali quello sull'(in)esistenza di Dio[6]. Nella quinta sezione, vengono presentati i *Problemi di Hilbert* (passati alla Storia in numero di dieci ma che in realtà erano ventitré, dei quali tutt'ora alcuni aperti[7], tra cui si inserisce il problema dell'assiomatizzazione della matematica e l'analisi della sua ricercata e possibile autoconsistenza e quindi completezza. In tale sezione si mostra, però, come i risultati di Gödel portino purtroppo a una risposta negativa in tal senso[8]. Infine, nella sezione 6 – quella conclusiva – si sottolinea come quanto detto in precedenza non impedisca di fare ricorso all'assiomatizzazione della matematica ma che occorra fare sempre molta attenzione. Ciò perché la conseguenza dell'incompletezza mostrata non divenga l'alveo nel quale si possono innescare tra l'altro incroci pericolosi, evitabili, nel caso, solo pensando alla concretezza del procedere umano, analizzata con strumenti quali la probabilità[9] o la finanza comportamen-

ISSN 1126-5191

tale[10]. Infine, viene presentato qualche breve commento sui rischi connessi con gli eventi a probabilità zero e anche sul Covid-19[11] così come un dubbio "teorico/filosofico/religioso" conclusivo.

2. Premessa

Quando facciamo uso della matematica (così come anche, e in termini più generali, di tutte le altre branche della scienza utili per interpretare i dati che abbiamo di fronte) dobbiamo prestare attenzione alle conclusioni da trarre. Ad esempio, in epoca di Covid-19, sappiamo che il 30 aprile 2020 c'erano 101.551 infettati in Italia e che il 1° maggio essi erano diventati, diminuendo, 100.943. Questa è totalmente una buona notizia? In realtà, il secondo dato deriva dalla somma algebrica di quello del primo giorno, a cui vanno sommati i nuovi infettati e sottratti sia i guariti che, purtroppo, i morti. Se estremizzassimo la situazione ipotizzando che il 1° maggio i malati fossero diventati 100.000 ma soltanto per la presenza di 1.000 nuovi malati, nessun guarito e 2.551 morti, interpreteremmo tale notizia come positiva? Ovviamente no. In maniera altrettanto rilevante, ma forse più sottile e illuminante, è opportuno porre attenzione ai sottointesi ovvero, in termini matematici, alle ipotesi da cui si parte. Ad esempio, domandarsi quanto faccia 1+1 può sembrare una domanda banale dall'aritmetica elementare, con ovvia risposta 2. Ma, se anziché utilizzare i numeri reali – l'insieme R di cui parleremo più avanti in dettaglio – prendessimo in esame l'insieme Z_2 dei resti modulo 2, ovvero i resti delle divisioni di un numero naturale intero per 2 (quindi Z_2 contiene solo 0 ed 1), la risposta sarebbe diversa. In effetti in Z_2 avremmo che 1+1 = 0. Vediamo un rapido modo per capirlo con un piccolo esempio. Supponiamo siano le 12. Se passano altre 12 ore, diremmo che sono le 24. Se ne passano altre 12 non si direbbe di certo "sono le 36" ma "sono le 12 (di nuovo)"[12]. Similmente, con un orologio che avesse solo le ore 0 e 1, se è l'ora zero e passa un'ora diremmo: "è l'una". Se ne passa un'altra diremmo: "è di nuovo l'ora zero". Di fatto, in un siffatto "orologio", 1 +1 = 0. In sintesi, è fondamentale specificare l'ambiente nel quale ci troviamo con le ipotesi di base che lo riguardano o i mattoni per costruire una data teoria. Magari quelli utili proprio per noi: gli assiomi. In matematica, si chiama assioma un enunciato che – pur non dimostrato – è considerato vero. Ossia una proprietà formale che (tipicamente con altre) costituisce una definizione implicita dell'"ente" a cui si riferisce[13]. Per inciso, in epistemologia, un assioma è un principio assunto vero perché giudicato evidente e che costituisce una base in quanto punto di partenza di una teoria deduttiva.

116 (2021/2)
ISSN 1126-5191

3. Richiami utili

3.a Gli insiemi

Si chiama insieme una collezione di oggetti, detti elementi, definibile con l'elenco di questi ultimi o tramite una legge che permetta di stabilire se un elemento stia o meno nell'insieme stesso. Ad esempio[14]: A = {1, 2, 3} oppure A = {x: x è un intero positivo più piccolo o uguale a 3} implica, ⇒, che 1 appartiene/sta in A, 1 ∈ A, mentre 5 non appartiene/non sta in A, 5 ∉ A. L'insieme che non ha elementi o la cui legge non è mai soddisfatta è indicato con l'insieme vuoto, ∅. Due insiemi sono detti uguali se hanno gli stessi elementi A = B; ad esempio A = {1, 2, 3} e B = {3, 2, 1} ⇒ A = B. Invece, se un elemento sta in A ma non in B o viceversa allora A e B sono detti diversi A ≠ B: A = {1, 2, 3} ≠ B = {1, 2, 7}. C è detto sottoinsieme *di A*, s.i., C ⊆ A, se ogni elemento di C sta anche in A (con A che risulta un s.i. di A stesso): C = {1, 2} ⊆ A = {1, 2, 3}. D è detto intersezione tra A e B D: = A ∩ B, se D contiene gli elementi comuni ad A e B: D = {1, 2, 3} ∩ {1, 2, 7} = {1, 2}; con l'intersezione che può essere vuota: {1, 2, 3} ∩ {7} = ∅. Ed è detto unione tra A e B, E = A ∪ B, se E contiene gli elementi che stanno in A oppure in B: E = {1, 2, 3} ∪ {1, 2, 7} = {1, 2, 3, 7}. F è detto differenza tra E e B, F = E-B, se F è costituito dagli elementi di E che non stanno in B: F = {1, 2, 3, 7} - {1, 2, 3} = {3}. F è anche detto complementare di B in E e indicato con B^c (sottintendendo la "complementarietà" in E). Si chiama applicazione o funzione f da un insieme A, detto dominio, a un altro B, detto codominio, una legge che associa a ogni elemento di A un unico elemento di B: f: A → B con x → y = f(x) (y = f(x) è l'immagine di x, tramite f). Tale definizione è estensibile anche a famiglie di insiemi. Una funzione f è detta iniettiva se per ogni, ∀, x, y∈A si ha che f(x) = f(y) ⇒ x = y ovvero un elemento del suo codominio può provenire al più da un unico elemento del suo dominio o, ancora equivalentemente, se due elementi del dominio hanno uguale immagine allora essi sono lo stesso elemento. Una funzione f è detta surgettiva o suriettiva, se ∀ y ∈ B, ∃x ∈ A: y = f(x), ovvero ogni elemento del suo codominio è immagine di qualche elemento del suo dominio. Una funzione f è detta biettiva o biunivoca se ∀ y ∈ B, ∃! x ∈ A: y = f(x), ovvero se è contemporaneamente iniettiva e surgettiva. Detto ciò, si chiama cardinalità il numero di elementi di un insieme. Per un insieme E, essa è indicata con |E|. Ad esempio si ha che |E| = |{1, 2, 3, 7}| = 4. Un insieme A è detto finito se ha un numero n finito (n < + ∞) di elementi (li si può "contare" e concludere in tempo finito l'operazione). Invece, A è detto infinito se troviamo un suo s.i. proprio (cioè diverso da A stesso) con cui A è in corrispondenza biunivoca. Ad esempio, l'intuitivo insieme dei numeri naturali (o interi positivi) N = {0, 1, 2, 3, …} è infinito, in quanto N può essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo s.i. proprio, ad esempio con quello dei numeri pari (2N) o con quello dei dispari ((2n+1) N) usando, rispettivamente, la funzione f: N → N tale che n → 2n a ogni numero naturale associamo il suo doppio; oppure f: N → N t.c. n → 2n + 1. N è un insieme intuitivo ma altrettanto vale per quello dei numeri reali R.

3.b. I numeri reali

Facciamo un esempio di insieme costruito per via assiomatica, quello dei numeri reali, ovvero l'insieme R, che si caratterizza per i seguenti assiomi[15]:

1. in R è definita un'operazione di somma "+" che, da due numeri reali, ne ricava un terzo: x + y = z con x, y, z ∈ R;
2. la somma è commutativa: x + y = y + z;
3. la somma è associativa: (x+y) + z = x + (y + z) = x + y + z;
4. in R, esiste ed è unico, ∃! un elemento detto zero tale che risulti x + 0 = 0 + x = x (0 elemento neutro per la somma);
5. ∀ x ∈ R, ∃! "-x" detto opposto di x tale che x + (-x) = 0;
6. in R è definita un'operazione di prodotto o moltiplicazione "*" che da due numeri reali ne ricava un terzo x * y = z con x, y, z ∈ R;
7. il prodotto è commutativo: x * y = y * z;
8. il prodotto è associativo: (x * y) *z = x * (y * z) = x * y * z;
9. in R ∃! un elemento detto uno: x * 1 = 1 * x = x (ovvero 1 elemento neutro per il prodotto);
10. 1 ≠ 0 (1 è diverso da 0);
11. ∀ x ≠ 0 ∈ R, ∃! "x^{-1}" detto inverso di x: x * x^{-1} = 1;
12. la somma è distributiva rispetto al prodotto: (x + y) * z = x * z + y * z.

Osservazione:

a) Usando "-y" si può definire la differenza tra x e y: x - y = x + (-y);

b) usando invece "y^{-1}", purché y ^{1} 0, si può definire la divisione tra x e y: $\frac{x}{y} = x * y^{-1}$[16].

In generale, se un insieme soddisfa i 12 assiomi precedenti, esso è detto campo[17] quindi I) R è un campo.

13. R contiene un s.i., R^+, che è quello dei numeri reali positivi, tale che valgano le due seguenti proprietà:

α. assioma dell'ordinamento: la somma e il prodotto di numeri positivi sono numeri reali positivi: ∀ x , y ∈ R^+ ⇒ x + y, x * y ∈ R^+;

116 (2021/2)
ISSN 1126-5191

β. legge di tricotomia: un numero reale x è positivo o è lo zero o è negativo (ovvero – x è positivo), $\forall\ x \in R \Rightarrow x \in R^+$ oppure $x = 0$ oppure $-x \in R^+$.

Come conseguenza dell'assioma 13, possiamo "ordinare" i reali: per definizione y è maggiore di x: $y > x$, con $x , y \in R$, se $y - x \in {}^+ \Leftrightarrow$ (equivalente a) y - x maggiore di 0: $y - x > 0$[18].

In generale, un campo che soddisfa l'assioma 13 è detto campo ordinato quindi II) R è un campo ordinato. Inoltre, III) Assioma di continuità: siano A e B due s.i. di R non vuoti (ognuno di essi ha almeno un elemento) t.c. ogni elemento di A sia minore di un qualunque elemento di B, $\forall\ x \in A$ e $\forall\ y \in B \Rightarrow x < y$. In più, per ognuna di tali suddivisioni di R, esista un (unico) elemento $z \in R$ detto separatore di A e B: a) A, B e z ricoprono R, ovvero $R = A \cup \{z\} \cup B$; b) z è più grande di ogni elemento di A e più piccolo di ogni elemento di B: $\forall\ x \in A \Rightarrow x < z$ e $\forall\ y \in B \Rightarrow z < y$.

Ebbene, premesso che per proposizione si intende un enunciato dimostrabile come vero/verificabile, vale:

Proposizione: R è caratterizzato dagli assiomi I, II, III (nel senso che valendo i 3 assiomi indicati, si può ottenere solo e soltanto un unico insieme, che è proprio quello dei numeri reali R, noti dalla matematica di base).

Osservazione: R ha infiniti elementi (lo vedremo dopo).

Arrivati fin qui, notiamo che già solo per introdurre i "semplici" numeri reali abbiamo dovuto dare degli assiomi, che fossero:

- ben scelti (sia nel senso di portare, in conclusione, al nostro obiettivo che al fatto di non essere in contraddizione con sé stessi);

- non ambigui (nel senso che non portino a equivoci sul significato, sulle implicazioni ecc.);

- non ridondanti e neanche in contraddizione tra loro (non solo singolarmente ma anche a gruppi e nel senso di scegliere il/un loro numero minimo utile).

Tutto ciò eliminando gli assiomi "implicati" dagli altri o "equivalenti" a qualcun altro ed evitando di ottenere casi in cui sia una proposizione che la sua negazione siano vere contemporaneamente. O, più generalmente, escludendo la scelta di assiomi che, se tutti soddisfatti, portano a insiemi vuoti. A rigore, nella logica l'idea della non contraddizione è rappresentata dal seguente:

Assioma di non contraddizione: è falsa ogni proposizione A che ne implichi sia un'altra B, che la negazione di B (indicata con $\neg$ B): A è falsa se $A \Rightarrow B$ e $A \Rightarrow \neg B$.

Occorre fare attenzione però alle conseguenze della negazione: il teorema "$C \Rightarrow D$" (ossia se è verificata la proprietà C allora è verificata anche quella D) equivale a quello "$\neg D \Rightarrow \neg C$", ossia se non vale la proprietà D

ISSN 1126-5191

allora neanche la C è vera. In simboli: "$C \Rightarrow D$" $\Leftrightarrow$ "$\neg D \Rightarrow \neg C$". Un tipico errore che si commette, in effetti, è pensare che "$C \Rightarrow D$" equivalga a "$\neg C \Rightarrow \neg D$". Tra l'altro, in matematica, le ipotesi sono i punti di partenza (i dati che abbiamo e che dobbiamo verificare per utilizzarli) mentre la tesi costituisce quelli di arrivo, ovvero quanto è da dimostrare. Comunemente, invece, si dice "dobbiamo dimostrare la mia ipotesi data da…" ma ciò è un errore. In realtà, bisognerebbe dire "dobbiamo dimostrare la mia tesi che è…". Tutto ciò chiarendo il seguente punto fondamentale in logica.

3.c. Il modus ponens e le dimostrazioni

Supponiamo di aver dimostrato un teorema che affermi che "$C \Rightarrow D$", ovvero se vale C allora vale anche D. Se, successivamente, volessimo applicarlo concretamente per ottenere che valga D, dovremmo prima verificare che le ipotesi in C siano soddisfatte e, solo dopo, concludere in conseguenza che D sia vera. In simboli e in successione ordinata: vale "$C \Rightarrow D$" (è vero il teorema che C implica D); vale C (le ipotesi C sono verificate); vale D (grazie al teorema su indicato, la tesi D è vera). Per convincerci che il *modus ponens* non è per niente inutile, vediamo un altro tipico errore che si commette se non procediamo correttamente con esso. Consideriamo il teorema: "Se oggi fosse venerdì, domani sarebbe sabato". Tutti conveniamo che esso è vero. Possiamo però concludere che domani sarà sabato senza alcun passaggio ulteriore? No! Infatti, se oggi fosse mercoledì, domani non sarebbe certo sabato. Al contrario, correttamente, potremmo dire che vale il teorema: "Se oggi fosse martedì, domani sarebbe mercoledì" e siccome oggi è martedì (ossia è verificato che oggi sia martedì), domani sarà mercoledì.

Il *modus ponens* è la maniera corretta di procedere secondo la tecnica della dimostrazione diretta. Cerchiamo di verificare che valga il teorema "$C \Rightarrow D$", tramite l'uso delle ipotesi C (magari, facendo ricorso ad altri risultati noti) al fine di arrivare a vedere se D è vera. Ad esempio:

Teorema: Qualunque sia l'insieme A, l'intersezione di A con il vuoto è l'insieme vuoto, "$\forall A \Rightarrow A \cap \emptyset = \emptyset$". Dimostriamo questo risultato. Basta notare che definito $B := A \cap \emptyset$, allora ogni elemento di B deve stare anche nel vuoto (perché B contiene gli elementi comuni ad A e appunto al vuoto, in quanto loro intersezione). Nel vuoto, però, non c'è nulla quindi nessun elemento può essere presente in B per cui $B = \emptyset$. E tutto ciò senza sapere né usare quali siano gli elementi di A, q.e.d. Un altro metodo è quello della dimostrazione indiretta o per contrapposizione che usa una proprietà già vista[19]: "$\neg D \Rightarrow \neg C$" è equivalente a, $\Leftrightarrow$, "$C \Rightarrow D$". A rigore, ci sarebbe anche il *modus tollens* che evolve questa tecnica, indicando che se "$C \Rightarrow D$" e

 116 (2021/2)
ISSN 1126-5191

"¬ D" (vale il teorema per cui C implica D e vale anche la negazione di D) allora è vera "¬ C" (vale la negazione di C). Più sottile è, invece, un altro metodo: quello della dimostrazione per assurdo o *reductio ad absurdum*, per il quale considerato il teorema "C ⇒ D", si nega la tesi (ossia si parte dal presupposto che ¬ D sia vera) per arrivare a violare (contraddire) una delle ipotesi contenute in C. Più avanti ne vedremo due applicazioni.

4. Due problemi centrali

4.a I nostri obiettivi

Poniamoci a questo punto i seguenti due problemi:

Problema 1: Potremmo cercare di definire una c.d. "teoria matematica", o una "meta-teoria matematica", con degli assiomi opportuni, in numero ridotto ecc. con cui impostare l'aritmetica, la geometria, le varie applicazioni della matematica (alla fisica, alla medicina, all'economia, alla finanza)? In particolare, per la matematica in sé, potremmo ottenere che essa sia auto-consistente ossia, per dirla grossolanamente, definibile per via interna senza incoerenze, completa ovvero tale che ogni dimostrazione o è vera o è falsa e con la possibilità di verificare ciò, al fine di racchiudere lo parte dello scibile che la riguardi?

Problema 2: Esiste un ponte che lega e connette la filosofia alla matematica?

In effetti, i due problemi posti sono collegati. Nel senso che al secondo, per via intuitiva, possiamo rispondere sì, dicendo che il ponte si chiama "logica (matematica)" e che per risolvere il primo proprio tale ponte sarebbe ed è utilissimo. Purtroppo, si tratta di un ponte che ci dice che incontreremo qualche "buco". Per capire il perché riprendiamo gli insiemi e specifichiamo alcuni punti rilevanti. Innanzitutto una precisazione: la *Teoria degli insiemi* prima richiamata è detta di Cantor (1845; 1918), ed è stata formulata verso la fine dell'Ottocento. Essa ha tante proprietà. Ad esempio, permette di verificare come, a parte gli insiemi finiti (tipo il suindicato E), ce ne siano altri che ne contengono infiniti ma in "quantità (ordini) differenti". Chiariamo questo punto considerando, per dire, N = {0, 1, 2, 3, …} i numeri naturali (o interi positivi), Z = {0, ± 1, ± 2, ± 3, …} gli interi (positivi e negativi), i numeri razionali $Q = \{q\!: q = \frac{m}{n}, \text{ con } m, n \in Z, n \neq 0 \text{ (m e n coprimi)}\}$ [20]. Essi costituiscono esempi di insiemi infiniti detti numerabili o con cardinalità χ_0[21]. Si tratta di quelli che contengono tanti elementi quanti quelli di N. Altrimenti detto: per ogni elemento di un insieme numerabile G, se ne può trovare uno e uno soltanto di N che gli corrisponde[22]. Nel caso di Q ciò è vero grazie al 1-o te-

116 (2021/2)
ISSN 1126-5191

orema di Cantor[23]. Il punto è che ci sono insiemi (infiniti) "più grandi" di N. Si dice che essi hanno cardinalità di un infinito di ordine superiore rispetto ad N. C'è insomma una gerarchia tra gli infiniti. È il caso dei numeri reali, R (R è più "grande" di N e ciò dimostrabile con il 2-o teorema di Cantor[24]), la cui cardinalità è detta del continuo o con cardinalità χ_1[25]. Altrettanto vale per i numeri irrazionali, indicati con R - Q[26] e di altri ancora "più grandi".

4.b Sulla dimostrazione per assurdo

Torniamo un attimo a questa tecnica per le dimostrazioni matematiche e cerchiamo di capire come funziona applicandola per dimostrare il seguente risultato:

Teorema: Non esiste alcun numero razionale q il cui quadrato faccia 2, $\neg\exists\, q \in Q$: $q^2 = 2$".

Prima di dimostrarlo intuitivamente, notiamo che se il teorema fosse vero ciò implicherebbe che, per invertire l'equazione presente in esso (e quindi per definire correttamente la radice quadrata), dovremmo far ricorso a numeri "non razionali", ovvero proprio quelli che stanno in R - Q. In effetti, l'idea sarebbe quella di definire un numero a: = $\sqrt{2}$ il quale, legittimamente, permetterebbe di scrivere $a^2 = 2 \Leftrightarrow a = \sqrt{a^2} = \sqrt{2}$.

Dimostrazione: Per assurdo, supponiamo che la tesi sia falsa. Pertanto esiste q numero razionale tale che $q^2 = 2$. Ora q, in quanto razionale, si deve poter esprimere come frazione (ridotta) di numeri interi positivi o negativi, ovvero $q = \frac{m}{n}$ con $n \neq 0$ da cui $2 = q^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = \frac{m^2}{n^2} \Leftrightarrow m^2 = 2\,n^2$. Tale uguaglianza, però, è assurda perché il primo membro, m^2, scomposto in fattori primi, conterrebbe il fattore 2 con un esponente pari; mentre il secondo, $2n^2$, lo conterrebbe con un esponente dispari (o viceversa). Ciò proprio perché c'è un ulteriore 2 che moltiplica n^2[27].

Un esempio più semplice di questa tecnica dimostrativa è il seguente:

Teorema: Non esiste alcun numero razionale che sia il più piccolo (tra i razionali) maggiore di zero: $\neg\exists\, q \in Q$: q = min {z ∈ Q: z > 0}.

Dimostrazione: Per assurdo, supponiamo che esista un razionale q il quale risulti essere il minimo tra i razionali maggiori di zero. Vediamo se arriviamo a qualche contraddizione. In sintesi: ∃ q ∈ Q e q > 0 con q minimo tra i razionali siffatti. Poniamo w: = q/2. Chiaramente w è un numero razionale più piccolo di q e maggiore di 0. Pertanto, 0 < w < q con w razionale. Ciò però è impossibile perché q era il minimo tra tutti i razionali maggiori di zero.

116 (2021/2)
ISSN 1126-5191

4.c Il principio di induzione

Se siamo all'interno dei numeri naturali N, possiamo fare ricorso ad un importante strumento per dimostrare che una proprietà dipendente da n ∈ N (indichiamola con P(n)) sia vera per ogni n naturale. Si tratta del

Principio di induzione: Data la proprietà P(n), con n ∈ N allora, supposto che

a) P(n) è vera con n = 0 (P(0) è vera) e b) vale che: se P(n) è vera allora anche P(n+1) è vera, risulta che P(n) è vera ∀ n ∈ N.

Diamo per dimostrato in termini astratti tale principio e vediamone un'applicazione[28]:

Teorema: ∀ n ∈ N ⇒ $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

Dimostrazione: Chiamiamo P(n) l'uguaglianza presente nella tesi. Innanzitutto vediamo che per n = 1, P(1) è vera: $1=\frac{1(1+1)}{2}$. Supponiamo che P(n) sia vera, anche P(n+1) lo sarà[29]? Ora P(n+1), l'uguaglianza da dimostrare, è la seguente $1+2+3+\cdots+n+(n+1)=^{?}\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ che possiamo riscrivere come $(1+2+3+\cdots+n)+(n+1)=^{?}\frac{(n+1)(n+2)}{2}$. Guardiamo al primo membro: poiché P(n) è vera, gli addendi nella prima parentesi tonda hanno per somma $\frac{n(n+1)}{2}$ e quindi il primo membro è pari a $(1+2+3+\cdots+n)+(n+1)=\frac{n(n+1)}{2}+(n+1)=\frac{n(n+1)+2(n+1)}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ che è proprio il secondo membro di P(n+1). Quest'ultima è allora verificata. L'uguaglianza della tesi, in conseguenza, vale per tutti i naturali applicando il principio di induzione.

4.d *Il paradosso di Russel* e la *Teoria assiomatica degli insiemi.*

A parte quanto visto, la *Teoria degli insiemi di Cantor* sembra potente ma il punto è che, però, essa ha qualche difetto e può portare a dei paradossi, rappresentati dall'esistenza di insiemi detti indedicibili[30], quelli per i quali è impossibile indicare quali elementi contengano[31]. A tal proposito, esiste un'antinomia trovata da Russell (1872;1970), detta appunto il *Paradosso di Russell* (1872; 1970). Esso fu teorizzato tra il 1901 e il 1902 e mostra come non si possano definire liberamente gli insiemi, al fine di essere certi che ciò che si costruisce abbia senso (logico). Vediamo in dettaglio.

Paradosso di Russell: In un villaggio (per semplicità di soli uomini), Fantasilandia, c'è un solo barbiere, Alberto. Ebbene, Alberto fa la barba tutti e soli gli abitanti che non si fanno la barba da sé. Il punto cruciale è: Alberto si fa la barba da solo o no? Cerchiamo di intersecare le argomentazioni intuitive con la logica.

116 (2021/2)
ISSN 1126-5191

1-o caso) se Alberto non si fa la barba da solo, qualcun altro a Fantasilandia dovrebbe fargliela. Ma chi è l'unico barbiere in tale villaggio? Proprio Alberto e quindi il barbiere Alberto dovrebbe fare la barba all'abitante Alberto, cioè a se stesso. Pertanto, avremmo ottenuto che "Alberto si fa la barba da solo". Assurdo, perché il barbiere rade solo quelli incapaci di farlo da sé[32].

Proviamo "dall'altro lato":

2-o caso) se Alberto si fa la barba da solo, allora il barbiere Alberto non può fare la barba all'abitante Alberto, perché tale barbiere rade solo e soltanto quelli che non si fanno la barba da soli. Ovvero il barbiere Alberto non rade l'abitante Alberto. Ovvero ancora Alberto non si fa la barba da solo. Assurdo. In tutte e due i casi, esaurienti le possibilità presenti, abbiamo un assurdo. Potremmo rileggere il tutto in termini insiemistici proprio per capire se, l'insieme P degli abitanti di Fantasilandia a cui il barbiere Alberto fa la barba (perché loro non ci riescono da soli) sia tale da contenere o meno l'elemento (abitante) Alberto[33].

La conclusione di ciò è l'attribuzione del nome *Teoria degli insiemi ingenua* (sempre dovuta a Cantor) a quella vista finora e all'introduzione di un'altra più evoluta, detta *Teoria assiomatica degli insiemi*, introdotta da Zermelo (1871; 1953)" nel 1908, e da Fraenkel (1888; 1970) nei successivi anni del primo Novecento. Poi ampliata e sistematizzata da Skolem (1887;1963) nel 1922. In particolare, la teoria assiomatica assurge al nome di *Teoria (degli insiemi) di Zermelo-Fraenkel* se non contiene il c.d. *assioma della scelta* (di Zermelo)[34] o quello di *Zermelo-Fraenkel-Choice* se lo contiene. Più in dettaglio, esso tratta oggetti che sono gli insiemi stessi e dice che «data una famiglia non vuota di insiemi non vuoti, esiste una funzione (una legge) che a ogni insieme della famiglia data fa corrispondere un suo elemento». In sostanza, tale assioma garantisce che presa una famiglia G non vuota di insiemi non vuoti, si possa sempre costruire un ulteriore insieme X sempre in G, scegliendo un elemento per ciascuno di quelli[35] in G (ossia da ogni insieme di partenza possiamo prendere un elemento e costruire un nuovo insieme sempre in G). La validità intrinseca di questo assioma è controversa. Il punto è che, con o senza di esso, si possono introdurre le basi della matematica per via assiomatica, enunciando nove assiomi (dieci con quello della scelta), come fecero appunto Zermelo e Fraenkel. Si tratta degli *assiomi di estensionalità*, *dell'insieme vuoto*, *della coppia*, *dell'unione*, *dell'infinito*, *di specificazione*, *di rimpiazzamento*, *dell'insieme potenza*, *di regolarità* e – appunto se presente – di quello della scelta[36]. Insomma, usando la *Teoria assiomatica di Zermelo-Fraenkel* saremmo nelle buone condizioni e anzi potremmo allargare l'obiettivo e cercare di assiomatizzare tutta la ma-

 116 (2021/2)
ISSN 1126-5191

tematica (non solo strutture quali l'aritmetica elementare). Anche qui, però c'è qualche problema: esistono (molte) importanti affermazioni (enunciati) che sono indipendenti da essa. Chiariamo che, per indipendenza logica tra due proposizioni A e B, si intende che non è possibile dedurre logicamente B da A e neanche il viceversa. Ossia A non implica B, A $\neg \Rightarrow$ B e B non implica A, B $\neg\Rightarrow$ A. Si tratta di proposizioni indedicibili dove – con questa espressione – si intende che si può dimostrare che né una data proposizione A né la negazione di A possono essere dedotte dagli assiomi di data una teoria. Vediamo un esempio classico in tal senso.

4.e L'(in)esistenza di Dio.

In effetti, si tratta di un problema collegato a questioni di indedicibilità: "Dio esiste"? Oppure, "Dio non esiste"? Ovviamente, non si parla di fede: se siamo credenti, in quanto tali, assumiamo la sua esistenza (e unicità per i cattolici e le religioni monoteistiche) e punto. Come noto, però, ci sono stati tentativi di usare la matematica per dimostrarne l'esistenza di Dio. Saltellando nel tempo e generalizzando non solo nel senso delle dimostrazioni matematiche, troviamo tra gli altri (non in maniera esaustiva)[37]: l'argomentazione ontologica di sant'Anselmo D'Aosta (1033/1034;1109), con le sue confutazioni (di Fra' Gaunilone (994;1083)); le successive rielaborazioni a favore fatte da Cartesio (1506;1650) e da Leibinz (1646;1716), con la contro-confutazione di Kant (1725;1804); il percorso alternativo delle cinque vie di san Tommaso d'Aquino (o di Roccasecca) (1225?;1274?) e la prova di Locke (1632;1704); le argomentazioni a favore del matematico Flauti (1782;1863) e i dubbi metodologici di Kierkegaard (1814;1855); la "morte" di Dio per Nietzsche (1844;1900) e le valutazioni di Feuerbach (1803,1872); l'ateismo di Marx (1818,1883), la (supposta) inutilità dell'esistenza Dio per Hawking (1942;2018) per il quale l'universo si può creare e si crea da solo; nonché anche la "libertà di scelta" di Monod (1910;1976). Il tutto con differenti e ulteriori argomentazioni teoriche o "empiriche".

Vediamo brevemente l'argomentazione di sant'Anselmo e la relativa (prima) confutazione di Gaunilone: non si può pensare nulla di più grande o più perfetto, il massimo per qualità, rispetto a Dio. In quanto è sottinteso che egli sia dotato appunto di tutte le qualità. Fin qui, l'esistenza di Dio è puramente teorica ma ammissibile (e in concreto ammessa, forse senza neanche volerlo fare volontariamente o coscientemente) anche da un ateo. Allora pur senza passare da un'(im)possibile verifica empirica, vediamo come a priori tale esistenza si confermi in termini logici. Se, infatti, immaginiamo che l'esistenza di Dio sia per l'appunto solo teorica e non presente

116 (2021/2)
ISSN 1126-5191

nella realtà, potremmo immaginare un secondo Dio, più "grande" il quale, rispetto al primo, aggiunga alle sue innumerevoli qualità proprio l'esistenza nella realtà. Però, ciò sarebbe paradossale, visto che già il primo Dio era il massimo. E Gaunilone? Egli, in realtà, non metteva in dubbio l'esistenza di Dio ma solo la validità della precedente dimostrazione di Sant'Anselmo. L'idea è di notare che non si può partire/fondarsi sull'esistenza divina (nel pensiero) per arrivare all'esistenza nella realtà sensibile, poiché possono essere partoriti (anche) pensieri impossibili. Pertanto, o la definizione precedente di divinità si basa su/si deduce da altro. E ciò inficia tutta la dimostrazione; oppure la definizione è completamente arbitraria (un problema mal posto in termini logici): "Se io penso un'isola perfettissima, allora questa esiste anche nella realtà?". Chissà? Magari no. Connessa con tutto ciò, c'è l'idea di incompletezza (o impossibilità dell'auto-consistenza o auto-fondazione) data dai *teoremi di Gödel* (1906,1978) di cui parleremo più avanti. Però, anche qui con un saltello temporale, prima di parlare di (in)completezza, continuiamo a ipotizzare di poter essere ottimisti e vediamo i celebri *Problemi di Hilbert* (1862,1943) che in parte in anticipo, in parte parallelamente alla teoria degli insiemi, sembravano poter portare a teorie auto-consistenti.

5. I dieci (o ventitré) *Problemi di Hilbert* e i *teoremi di Gödel*

5.a Presentazione dei problemi

I c.d. *Problemi di Hilbert* vennero da questi (e non solo) pensati e poi presentati alla conferenza internazionale dei matematici nel 1900. Hilbert disse:

> Se vogliamo immaginarci lo sviluppo presumibile della conoscenza matematica nel prossimo futuro, dobbiamo far passare davanti alla nostra mente le questioni aperte e dobbiamo considerare i problemi che sono posti dalla scienza attuale e la cui soluzione attendiamo dal futuro. Questi giorni, che stanno a cavallo tra due secoli, mi sembrano ben adatti per una rassegna dei problemi [...].

In effetti, nell'anno 1900, la *Teoria degli insiemi di Cantor* aveva ancora forte valenza, pur se da lì a poco sarebbe venuto fuori il *Paradosso di Russell*. E, comunque, si può ipotizzare che forse già da allora fossero iniziati studi prodomici e riflessioni che, cammin facendo, avrebbero condotto alla *Teoria assiomatica degli insiemi di Zermelo, Fraenkel e Skolem*. In ogni caso, l'idea era, come detto, che risolvere tali problemi facesse ben sperare sul fu-

ISSN 1126-5191

turo dell'intera matematica. In particolare, l'obiettivo principale di Hilbert era quello attinente al suo programma[38], connesso o in parte sottinteso con i suoi problemi. Tale obiettivo reputava che la coerenza dei sistemi formali (complessi) quali l'analisi matematica sui reali o l'intera matematica potesse essere dimostrata scomponendo il sistema considerato in altri più semplici, riconducibili alla coerenza della matematica elementare (ovvero in N). O, altrimenti detto, si riteneva di poter soddisfare la condizione di auto-consistenza o di completezza della matematica stessa. Riguardo il numero della lista dei problemi, al congresso indicato, Hilbert ne presentò dieci ma poi ne pubblicò ventitré successivamente[39]. La lista completa dei problemi, reperibile su varie fonti bibliografiche e sitografiche, ha una versione carina[40] che fa riflettere. Infatti alcuni problemi sono stati risolti, altri sono irrisolvibili, altri ancora sono vaghi e infine ulteriori, a dimostrazione della lungimiranza di Hilbert, sono tutt'ora irrisolti ovvero sono problemi aperti, come si dice. In particolare, pur se non presente tra i *Problemi di Hilbert* ma collegato a uno di essi, c'è il celebre e a lungo problema aperto dell'(ultimo) teorema di Fermat (1601;1655), formulato nel 1638. Nel 1900 esso non era stato dimostrato (si trattava di una congettura) e poi venne risolto (solo) nel 1994 da Wiles (1953; vivente) – tant'è che oggi lo si chiama

Teorema di Fermat-Wiles: Non esiste alcun $n \in N$, con $n > 2$, che sia soluzione della seguente equazione $a^n + b^n = c^n$ per dati a, b e c. Per inciso, se $n = 2$, si avrebbe $a^2 + b^2 = c^2$, ossia il *Teorema di Pitagora*.

Ebbene, il *Teorema di Fermat-Wiles* è connesso con la *Funzione Zeta di Riemann*, presente nella relativa ipotesi e nel conseguente problema di Hilbert, detto appunto *Ipotesi di Riemann*, la quale attiene all'esistenza degli zeri di tale funzione[41]. Se fosse risolto, questo risultato avrebbe incredibili conseguenze teoriche sulla determinazione dei numeri primi e, quindi, applicative in vari campi teorici e non quali fisica, crittografia (con l'uso sui siti web), probabilità, statistica, finanza ecc. In ogni caso, la lista di Hilbert mostrava anche quanto preziosa sarebbe stata la teoria assiomatica degli insiemi se usata come strumento per procedere ad ampio raggio nella scienza.

5.b I *teoremi di Gödel*

Purtroppo, nel campo dell'assiomatizzazione della matematica, intervenne Gödel con i suoi due teoremi, dimostrati nel 1931:

1-o Teorema di Gödel: In ogni teoria matematica T, sufficientemente ricca da contenere l'aritmetica, esiste una formula per la quale, se T è coerente (ovvero in essa è impossibile dimostrare contraddizioni) allora né tale formula né la sua negazione sono dimostrabili in T stesso.

 116 (2021/2)
ISSN 1126-5191

Qui, sottintesa, c'è la costruzione dei numeri naturali N che può avvenire in due modi:

a) Per via intuitiva ricorrendo alla cardinalità degli insiemi. Vediamo come: per definizione, 0 è la cardinalità dell'insieme avente il vuoto come unico: $0 = |\{\varnothing\}|$; 1 è la cardinalità dell'insieme contenente il solo elemento zero $1 = |\{0\}|$; 2 è la cardinalità dell'insieme contenente 0 e 1, ossia $2 = |\{0,1\}|$ ecc. Oppure:

b) in maniera più elegante, usando gli *Assiomi di Peano* (1858,1932) che caratterizzano una terna opportuna (N, 0, s), con $0 \in N$, $s: N \to N$ (detta applicazione successore) che associa a $n \in N$ il suo successore $n + 1 \in N$: $s(n) = n + 1$, in modo che:

1. Numeri diversi hanno successori diversi (s è iniettiva);
2. 0 non è il successore di alcun numero naturale (0 è il "primo" numero naturale: $\nexists\, n \in N$ t.c. $s(n) = 0$);
3. Vale il principio di induzione: un s.i. M di N che contenga sia lo zero che ogni successore di un suo elemento coincide con stesso N: se $M \subseteq N$ è t.c. $0 \in M$ e se $n \in M \Rightarrow n+1 \in M$ allora $M = N$.

Osservazione: in questo caso, il principio di induzione è un assioma (e non un teorema).

Pertanto, con il 1-o *Teorema di Gödel*, otteniamo che, anche se formalizzassimo in maniera coerente la matematica, in un mondo (almeno) sufficientemente ricco e incisivo da poter assiomatizzare i numeri naturali in maniera elementare, comunque riusciremmo a trovare una proposizione corretta (sintatticamente) per la quale non potremmo dimostrare né che essa sia vera né che sia falsa. Insomma, c'è il forte sospetto che il problema 1 vada a finire male. Il punto è che, se ancora fossimo un attimo ottimisti, ecco che interviene un secondo risultato del "nostro" caro logico:

2-o Teorema di Gödel: In ogni teoria matematica T, sufficientemente ricca da contenere l'aritmetica, se T è coerente allora non è possibile provare la coerenza di T all'interno di T stesso (ovvero T non è auto-consistente).

Leggiamo questo secondo teorema in maniera intuitiva dicendo che neppure facendo ricorso alla semplicità di un sistema teorico quale l'aritmetica elementare, si può riuscire a provare la sua stessa coerenza (ovvero ad auto-fondarlo). Tanto meno questo avviene allora se, invece, si tratta di un sistema complesso, in cui il controllo di tale coerenza sarebbe chiaramente ben più complicato. In sintesi, niente auto-consistenza.

Rileggiamo in maniera ancora più *naïf* i due teoremi (indicandoli ora compiutamente come di incompletezza dove, per contrapposizione, la completezza di una teoria T rende vera ogni sua proposizione o la sua negazione). Per farla semplice, pensiamo che una teoria J che parta da 3 as-

ISSN 1126-5191

siomi: A1, A2, A3. Allora possiamo ottenere, e anzi otteniamo sempre, una proposizione vera non dimostrabile in J. Ovvero, troviamo una formula F di cui non sappiamo né se sia vera né se lo sia la sua negazione. Facciamoci "furbi" allora, controllando la coerenza di A1, A2, A3 con F (o con la sua negazione), per poi aggiungere F (o la sua negazione) alla nostra teoria J. In sintesi, costruiamo una seconda teoria I, con gli assiomi A1, A2, A3, A4, con A4 data proprio da F (o dalla sua negazione). Ebbene, ora si ha che la "nuova" teoria I, incrocia un'altra formula, chiamiamola G, di cui un'altra volta non possiamo dimostrare né la veridicità né la falsità. Tra l'altro, il controllo sulla coerenza di I dovrebbe avvenire di fatto all'esterno di I stesso, ricadendo comunque nel 2-o teorema e mordendoci quindi la coda. In sintesi, il famoso problema 1 non porta ad alcuna soluzione! In realtà è il ponte del problema 2 che, con una costruzione bellissima, ci dice che ci sono dei buchi. In conclusione, non possiamo usare la matematica per completare se stessa (e tutto lo scibile). Tra l'altro, il medesimo ponte ci porterebbe a una conclusione simile per la filosofia o le altre scienze!

6. Conclusioni

6.a Una prima conclusione con un esempio

Si può, e lo si fa opportunamente, costruire teorie assiomatiche. Ad esempio per la probabilità – e con un aspetto più applicativo – la statistica con i loro indotti alle scienze o all'economia/finanza, i quali hanno avuto un grande sviluppo, una volta sistematizzate. Bisogna, però, procedere con prudenza. Vediamo proprio nel caso della probabilità (al singolare!) questo punto introducendo la sua definizione assiomatica à la Kolmogorov (1903;1987), che è potentissima per le sue conseguenze applicative. Essa è la seguente: consideriamo la coppia (Ω, Φ), detta spazio probabilizzabile in cui Ω è un insieme non vuoto detto evento certo, i cui elementi si chiamano eventi elementari ed Φ è una famiglia di s.i. di Ω che sia una σ-algebra – (una collezione di insiemi t.c. 1. l'evento certo sta in Φ $(\Omega \in \Phi)$; 2. se un evento A sta in Φ, anche il complementare di A sta in, $A \in \Phi \Rightarrow A^c \in \Phi$; 3. se gli elementi A_i di una famiglia numerabile di insiemi stanno in Φ allora anche la loro unione sta in Φ: data $\{A_i\}_{i \in N} \subseteq \Phi$ $(A_i \in \Phi\ \forall i \in N \Rightarrow \cup_{i=1}^{+\infty} A_i \in \Phi$. Gli elementi di Φ si chiamano eventi. Ebbene, una funzione P è detta probabilità se $P: \Phi \rightarrow R$ t.c. 1. la probabilità di qualunque insieme è positiva o zero, $P(A) \geq 0\ \forall\ A \in \Phi$; 2. la probabilità dell'evento certo è 1, $P(\Omega) = 1$; 3. la probabilità dell'unione di insiemi di Φ a due a due disgiunti

ISSN 1126-5191

(ovvero incompatibili) è data dalla somma delle probabilità di ogni insieme: $\{A_i\}_{i \in N} \subseteq \Phi$, $A_i \cap A_j = \emptyset \; \forall \; i,j \in N \Rightarrow N \; (\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i) \equiv P \; (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P \; (A_1) + P \; (A_2) + P \; (A_3) + \ldots \; \sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$. Dalla definizione di P, conseguono varie proprietà. Ad esempio $\forall$ A, B $\in \Phi$: l'insieme complementare di A $\in \Phi$ è t.c. $P \; (A^c) = 1\text{-}P \; (A)$; l'evento impossibile $\emptyset$ ha probabilità zero ($P \; (\emptyset) = 0$); $P \; (A \cup B) = P \; (A) + P \; (B) - P \; (A \cap B)$; $P \; (A - B) = P \; (A) - P \; (A \cap B)$; $0 \leq P \; (A) \leq 1$; $A \subseteq B \Rightarrow P \; (A) \leq P \; (B)$; $P \; (A \cup B) \leq P \; (A) + P \; (B)$.

Purtroppo, però, vediamo cosa accade se pensiamo a N e ipotizziamo che "estrarre un numero naturale a caso sia equiprobabile" ovvero che la probabilità di estrazione di due numeri naturali sia la stessa quali che essi siano: $P \; (n) = P \; (m) = p$, $\forall$ n, m $\in$ N, con $0 < p < 1$ (estremi esclusi per evitare casi estremi banali). In tal caso, si giungerebbe a una contraddizione nel valutare la probabilità di tutti i naturali. In effetti, si potrebbe ricavare che $P \; (N) = +\infty$, superando quindi il valore massimo della probabilità che è invece uno[42].

Per inciso, in soccorso applicativo, per risolvere una tale *impasse*, potrebbe intervenire la finanza comportamentale, guardando alle mosse concrete degli individui. Infatti, è molto difficile immaginare come realistica l'eventualità che, se chiedessimo a una persona scelta a caso di dirci un numero naturale anch'esso scelto caso, quest'ultima direbbe ad esempio 1.743.459.248 oppure 2.569.300.000 (che in € e per difetto, era il debito pubblico italiano a fine 2020). Ovvero la scelta di siffatti numeri è molto rara in concreto.

In sintesi, per terminare, ci possono essere paradossi, se prendiamo la via assiomatica senza riflettere con attenzione. E allora, non ci si deve fermare e rinunciare ma occorre procedere *cum grano salis*, con dubbi illuministici e intuizione (fede).

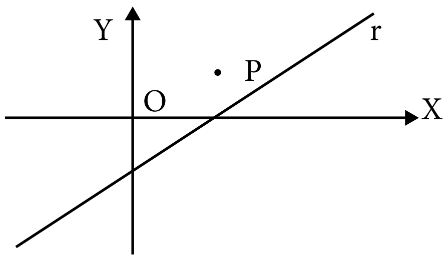
6.b Qualche commento finale

Spesso si utilizza la distribuzione normale o Gaussiana[43] per gli studi di problemi applicativi in cui si usa la statistica. In realtà, purtroppo, pur rimanendo un valido riferimento in molti contesti, essa diviene meno utilizzabile per i dati finanziari e probabilmente per un'epidemia stile Covid-19, fenomeni per i quali sono più rappresentative altre distribuzioni, a causa di alcune difficoltà che si presentano con gli eventi rari. Per inciso, l'attuale epidemia non è un c.d. cigno nero[44], ovvero un evento (totalmente) imprevedibile. Nel passato recente, dopo la SARS, l'Organizzazione Mondiale per la Sanità (OMS) stava infatti studiando un evento che avrebbe supposto la

 116 (2021/2)
ISSN 1126-5191

diffusione di una pandemia (ossia a livello mondiale), in 72 ore, proprio grazie ai numerosissimi collegamenti aerei ed economici. Pertanto, il Covid-19 è sì un evento raro ma non imprevedibile. In effetti, in termini di Taleb, l'epidemia costituirebbe piuttosto un esempio di cigno grigio[45], ovvero un evento sì raro ma in qualche misura prevedibile e quindi più gestibile per "combatterne" le conseguenze negative.

Occhio, però, proprio agli eventi rari: essi si possono verificare! Addirittura, ci possono essere casi in cui un evento con probabilità zero (un evento impossibile) diventa realtà: basta pensare a una retta r nel piano. Per la teoria probabilistica, essa ha appunto probabilità nulla di verificarsi. Sappiamo, però, che r contiene infiniti punti, ciascuno interpretabile come un portafoglio finanziario. Ebbene, se r indicasse i portafogli altamente rischiosi che portano alla perdita dell'intero capitale investito, tipo quello indicato nella figura seguente con il punto P, occorrerebbe fare molta attenzione. Infatti, se P fosse effettivamente "raggiunto" dal nostro portafoglio – pur avendo probabilità zero – perderemmo tutto!



Tra l'altro, questo è un esempio di come possiamo incappare in errori metodologici, visto che siamo esseri umani. Secondo uno specifico effetto che subisce le conseguenze degli aspetti emotivi quando dobbiamo assumere decisioni in condizioni di incertezza – un'euristica o distorsione in termini di finanza comportamentale – che nel caso in esame si chiama "fallacia del giocatore".

Ulteriormente, non bisogna sottovalutare l'importanza con cui bisogna porre le questioni, ad esempio in medicina. Si tratta di un punto delicato al momento, vista la presenza del Coronavirus. In effetti, il modo di porre le domande influenza o può influenzare le decisioni assunte e ciò può essere altamente rischioso (il c.d. *framing* conta). Per dare due esempi su quanto detto:

a) c'è una situazione in cui ci sono sintomi che, nel 99% dei casi, indicano la presenza della malattia x. In realtà, essi mostrano la presenza della più rara

 116 (2021/2)
ISSN 1126-5191

malattia y, verificabile nell'1% di quelli restanti e proprio y è la sindrome effettivamente in corso;

b) la decisione se prescrivere o meno un vaccino z, chiedendosi se farlo o meno, visto che "con z, si salveranno 70 persone su 100" oppure visto che "con z ne moriranno 30 su 100" può portare a conclusioni diverse (pur se l'effettiva probabilità di salvezza è la stessa).

6.c Una seconda conclusione

Alla luce di tutto quanto detto, sorge una domanda per la quale più che una conclusione, si potrebbe parlare di una riflessione teoretica la quale, focalizzando sul fatto che i *teoremi di Gödel* sono interpretabili come il più grande colpo (e in realtà quello definitivo) al desiderio di "autosufficienza" della matematica (e di fatto, anche delle altre scienze), porti a chiedersi in maniera razionale e fideisticamente insieme (un altro bel paradosso): tali teoremi, in accoppiata con il concetto di infinito, conducono al dubbio/sospetto dell'esistenza di Dio?

Ringraziamenti

Questo articolo ha come origine e cuore una lezione svolta nel 2020 presso l'Istituto teologico abruzzese-molisano "Plenum", affiliato all'Università Pontificia Laterenense, su invito del prof. S. Luciano che qui si ringrazia, così come tale Università per l'invito ricevuto.

[1] Si veda V. COSTA, *Rischio finanziario e finanza comportamentale*, monograph, preprint, 2021.
[2] Si vedano M. PICONE, G. FICHERA, *Corso di analisi matematica*, Veschi, Roma 1988, vol. I; R. COURANT, J. FRITZ, *Introduction to calculus and Analysis: 1*, Springer Verlag, Berlin 1998; C. FERRANDI, *Filosofia e scienza. Un intreccio fecondo*, Il Capitello, Roma 1991; I.N. HERSTEIN, *Algebra*, Editori Riuniti University Press, Roma 2010.
[3] Per quest'ultima si veda sempre I.N. HERSTEIN, *op. cit*.
[4] Si veda il vol. 3 di C. FERRANDI, *op. cit*.
[5] Si vedano I.N. HERSTEIN, *op. cit*.; T. JECH, *Set Theory. The Third Millenium Edition, Revised and Expanded*, Springer Verlag, Berlin 2003; G. TOURKAKIS, *Lectures in Logic and Set Theory*, Cambridge University Press, Cambridge 2003.
[6] Si vedano T. JECH, *op. cit*.; C. FERRANDI, *op. cit*.; G. TOURKAKIS, *op. cit*.
[7] Si vedano U. BOTTAZZINI, *I problemi di Hilbert. Un programma di ricerche per le "generazioni future"*, in C. BARTOCCI, R. BETTI, A. GUERRAGGIO, R. LUCCETTI (a cura di), *Vite matematiche. Protagonisti del '900 da Hilbert a Wiles*, Springer, Berlin 2007; D. ROWE, J.J. GRAY, *The Hilbert challenge*, Oxford University Press, Oxford 2000.
[8] In un ambito che si potrebbe generalizzare il tutto verso la c.d. crisi dei fondamenti della matematica, per cui rimandiamo al vol. 2 di C. FERRANDI, *op. cit*.
[9] G. KOCH, *La matematica del probabile*, Aracne, Roma 1997.
[10] Si vedano D. KAHNEMAN, *Thinking, Fast and Slow*, Farrar, Straus and Giroux, New York 2011 (ed. italiana ID., *Pensieri lenti e veloci*, trad. it. L. Serra, Mondadori, Milano 2021); R.H. THALER, *Misbehaving. The Making of Behavorial Economics*, W.W. Norton & Company, New York 2015 (ed. italiana ID., *Misbehaving. La nascita dell'economia comportamentale*, trad. it. G. Barile, Einaudi, Torino 2018); V. COSTA, *op. cit*.
[11] Si veda V. COSTA, *op. cit*.
[12] Pur se ovviamente sono le 12 del giorno successivo.
[13] Potremmo dire: "qualcosa vero per fede".
[14] In generale, per una "definizione" occorre indicare i due punti prima dell'uguale. Qui però lo faremo solo dove è opportuno evitare ambiguità, altrimenti lo ometteremo per alleggerire la notazione.
[15] Si veda M. PICONE, G. FICHERA, *op. cit*. Inoltre, da ora in poi, è sottointeso che le proprietà valgano $\forall$ x, y, z, "per ogni/per qualunque reale x, y, z".
[16] Indicata anche con x : y oppure x/y.
[17] La classe più generale detta corpo può essere o meno commutativa. Un campo è invece inteso sempre come commutativo (quindi esso è un corpo commutativo).
[18] In maniera equivalente si può dire che x è minore di y : x < y.
[19] Letta ora da sinistra a destra (v. prima).
[20] m e n primi coprimi significa che essi non hanno fattori comuni o che, in altri termini, la loro frazione è ridotta ai minimi termini.
[21] Si legge: "*aleph* con 0".
[22] In termini di funzioni, c'è una corrispondenza biunivoca tra G ed N.
[23] Per il cui enunciato, si veda I.N. HERSTEIN, *op. cit*.
[24] *Ibidem*.
[25] Si legge "*aleph* con 1".
[26] Ovvero tutti i numeri reali che non sono razionali: ad esempio, i numeri infiniti aperiodici, quelli trascendenti, i numeri e, π, $\sqrt{2}$ ecc.
[27] Per dire, se il numero q cercato fosse $\frac{2}{3}$, avremmo $2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 \Leftrightarrow 2 \cdot 3^2 = 2^2$ riscrivibile come $2^1 \cdot 3^2 = 2^2$, con il fattore 2 che sarebbe elevato, a sinistra, con esponente 1; mentre, a destra, con esponente 2 il che è impossibile.
[28] È quella usata implicitamente da Gauss (1777, 1855), detto *Princeps Mathematicorum*, per ottenere il valore della somma dei primi 100 numeri naturali; dimostrazione da lui fatta a 5 anni! In sostanza, egli metteva su una prima riga i numeri da 1 a 100; su una seconda quelli da 100 a 1 (a scalare e in modo che sotto l'1 della prima riga ci fosse 100 della seconda, avendo come somma 101; sotto il 2 della prima ci fosse 99 della seconda, avendo sempre come loro somma 101 ecc.). Pertanto, c'erano 100 addendi pari a 101, ovvero 100 * 101. Tuttavia, siccome si era proceduto su due righe, la somma da 1 a 100 era stata ottenuta due volte. Per cui bastava dividere per 2 per ottenere il risultato desiderato ovvero: 1 + 2 + 3 +… + 100 = (100 * 101) / 2 = 5050.
[29] n+1 è detto "successore" di n.
[30] Termine che a breve useremo anche pensando alle proposizioni.
[31] Attenzione: non si tratta di insiemi vuoti tipo quello {gli uomini o donne attualmente in vita con più di 200 anni}, quanto meno alla data attuale.
[32] Si vedano le frasi sottolineate.
[33] Ci sono stati possibili tentativi di superamento del *Paradosso di Russell*, secondo tre filoni: la teoria dei tipi, l'intuizionismo e il formalismo. Si veda C. FERRANDI, *op. cit*.

[34] O sue forme equivalenti, quali ad esempio il *Lemma di Zorn*, si veda I.N. HERSTEIN, *op. cit*.
[35] Sono sempre insiemi.
[36] Per approfondimenti, si veda I.N. HERSTEIN, *op. cit*.
[37] A parte i più recenti sviluppi (spesso inseriti in articoli divulgativi e pubblicati più su quotidiani che non su riviste scientifiche), per una panoramica della questione si veda L.P. POJMAN, *Philosophy of Religion. An Anthology*, Wadsworth, Belmont 2003[4].
[38] Poi denominato appunto *programma di Hilbert*.
[39] Si veda D. ROWE, J.J. GRAY, *op. cit*.
[40] Si vedano U. BOTTAZZINI, *I problemi di Hilbert. Un programma di ricerche per le "generazioni future"*, in C. BARTOCCI, R. BETTI, A. GUERRAGGIO, R. LUCCETTI (a cura di), *op. cit*.; www.it.wikipedia.org; www.storiografia.me; www.treccani.it e D. ROWE, J.J. GRAY, *op. cit*.
[41] Ovvero ai punti del dominio nei quali la funzione assume valore zero.
[42] Per convincersene, basta considerare che ponendo $A_i = \{i\}$. Gli insiemi A_i sono a 2 a 2 disgiunti e, uniti, danno tutto N. Ora, costruendo la c.d. σ–algebra generata dagli (ovvero la più piccola σ–algebra che contiene tali insiemi), per le proprietà della probabilità, si avrebbe P(N) = P ($\bigcup_{i=1}^{+\infty} A_i$) = $\sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$ = $\sum_{i=1}^{+\infty} p = p \cdot \sum_{i=1}^{+\infty} 1 = p \cdot (+\infty) = +\infty$, perché 0 < p < 1.
[43] Si veda D. PICCOLO, *Statistica*, il Mulino, Bologna 1998.
[44] Si veda N.N. THALEB, *The Black Swan. The Impact of the Highly Improbable*, Random House, New York 2007 (ed. italiana ID., *Il Cigno nero. Come l'improbabile governa la nostra vita,* il Saggiatore, Milano 2009).
[45] *Ibidem*.

Manifattura di Castelli d´Abruzzo, *Madonna dei sette dolori assistita dalle Marie* - sec. XVIII - 1790-1799 - maiolica dipinta a smalto - cm 20,50 x 26 - *collocazione*: Teramo - Palazzo Melatino piano terra, sale espositive - *proprietà*: Fondazione Tercas